

© Н.Г. МУСАКАЕВ¹, С.Л. БОРОДИН², С.Н. РОМАНИЮК³

¹Тюменский государственный университет

^{1,2}Институт теоретической и прикладной механики
им. С.А. Христиановича СО РАН (Тюменский филиал)

³Институт криосферы Земли СО РАН (Тюмень)
timms@tmn.ru

УДК 536.2

**МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ОДНОМЕРНОЙ
РАДИАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ ТЕПЛОПЕРЕДАЧИ
В ОКРУЖАЮЩИЕ СКВАЖИНУ МЕРЗЛЫЕ ПОРОДЫ***

**SOLUTION METHODS OF ONE-DIMENSIONAL
RADIAL PROBLEM OF HEAT TRANSFER IN THE PERMAFROST
FORMATIONS SURROUNDING A WELL**

АННОТАЦИЯ. Статья посвящена методам решения одномерной радиальной задачи теплопередачи в окружающие скважину многолетнемерзлые породы (ММП). Приведена математическая модель указанной задачи, для ее решения рассмотрены четыре численных метода: метод энтальпий с использованием явной схемы, метод ловли фронта в узел сетки с использованием неявной схемы, метод ловли фронта в узел сетки с использованием шеститочечной симметричной схемы, и квазистационарный подход. Получено автомодельное решение, позволяющее рассчитывать радиус протаивания в ММП и используемое для оценки вышеприведенных численных методов (в статье приведено сравнение автомодельного решения и результатов расчетов радиуса протаивания по методу энтальпий). Также представлен сравнительный анализ численных решений рассматриваемой задачи теплопередачи в ММП с использованием различных численных методов. Итогами работы являются построенное автомодельное решение для радиальной задачи Стефана и выбор наиболее предпочтительного численного метода, обеспечивающего высокую точность и наибольшую среди рассмотренных методов скорость расчетов радиуса протаивания и распределения температуры в окружающих скважину мерзлых породах.

SUMMARY. The article tells about the solution methods of one-dimensional radial problem of heat transfer in the permafrost formations surrounding a well. The mathematical model of this problem is given. To solve the problem, four numerical methods are considered: enthalpy method with explicit scheme, method of catching the front in a mesh point with implicit scheme, method of catching the front in a mesh point using six-point symmetric scheme and quasi-steady approach. A self-similar solution enabling calculation of the thawing radius in permafrost formations is obtained and used to assess the use of numerical methods (the comparison of the results of self-similar

* Работа выполнена при содействии Совета по грантам Президента РФ для государственной поддержки ведущих научных школ РФ (Грант № НШ-2669.2014.1).

solutions and the results of calculations of the thawing radius by enthalpy method is presented in the article). It is also presented the comparative analysis of numerical solutions of the problem of heat transfer in permafrost formations using different numerical methods. The results of the work are the self-similar solution for the radial Stefan problem and the preferred choice of a numerical method, which provides high accuracy and the highest rate of calculating the radius of thawing and temperature distribution in the permafrost formations surrounding a well.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА. Теплопередача, мерзлые породы, задача Стефана, авто-модельное решение, численные методы.

KEY WORDS. Heat transfer, permafrost formations, Stefan problem, self-similar solution, numerical methods.

Ряд месторождений нефти и газа находится в районах вечной мерзлоты. Чтобы правильно моделировать течение флюида в скважинах таких месторождений, необходимо рассматривать теплообмен с окружающими мерзлыми породами с учетом их протаивания [1]. Существует большое количество численных методов для решения подобных задач [2-4], в связи с чем возникает необходимость выбора наиболее приемлемого из них, который обеспечивал бы высокую точность расчетов, при этом не требуя большого количества расчетного времени.

Математическая модель. При математическом описании закономерностей движения фронта фазового перехода в многолетних мерзлых породах (ММП) примем следующие допущения: породы, окружающие скважину, однородны и изотропны; плотность мерзлой породы равна плотности талой; при движении фронта фазовых переходов в ММП не происходит массопереноса жидких флюидов. Также необходимо отметить, что температурные поля в системе «скважина — окружающая порода» в общем случае нестационарны. Однако выполненные оценки [5] показывают, что при характерных для скважинных потоков темпах изменения температурных полей влияние их нестационарности на коэффициент теплоотдачи несущественно, поэтому в интервале от потока до внешней границы скважины рассматриваем квазистационарное распределение температуры. При сделанных допущениях уравнения теплопроводности в талой (1) и мерзлой (2) зонах, начальные и граничные условия (3), (5), (6), а также закон движения границы раздела талой и мерзлой пород (4) могут быть записаны в виде [4], [6], [7]:

$$\frac{\partial T_{\text{th}}}{\partial t} = \chi_{\text{th}} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T_{\text{th}}}{\partial r} \right), \quad (R_c \leq r \leq R_{\text{th}}) \quad (1)$$

$$\frac{\partial T_{\text{fr}}}{\partial t} = \chi_{\text{fr}} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T_{\text{fr}}}{\partial r} \right), \quad (R_{\text{th}} \leq r < \infty) \quad (2)$$

$$-\lambda_{\text{th}} \frac{\partial T_{\text{th}}}{\partial r} = \frac{\alpha(T_{\text{fr}} - T_0)}{2\pi R_0}, \quad (r = R_c) \quad (3)$$

$$\lambda_{\text{fr}} \frac{\partial T_{\text{fr}}}{\partial r} \Big|_{r=R_{\text{th}}+0} - \lambda_{\text{th}} \frac{\partial T_{\text{th}}}{\partial r} \Big|_{r=R_{\text{th}}-0} = \rho S_w L \frac{dR_{\text{th}}}{dt}, \quad (4)$$

$$T_{\text{fr}} = T_{\text{geo}}, \quad (r = \infty) \quad (5)$$

$$T_{\text{fr}} = T_{\text{geo}}, \quad (t = 0) \quad (6)$$

Здесь t, r — временная и радиальная координаты; T_i, χ_i и λ_i ($i = \text{th}, \text{fr}$) — температура, коэффициенты температуропроводности и теплопроводности в талой и мерзлой зонах, соответственно; R_c и R_{th} — внешний радиус скважины и радиус протаивания в ММП; α — коэффициент теплопередачи на единицу длины скважины от скважинного потока к окружающей породе; T_{fl}, T_0 — температура потока в скважине и температура на границе скважины с породой, ρ — плотность породы; S_w — льдосодержание мерзлой породы; L — удельная теплота таяния льда; T_{geo} — начальная температура породы.

Коэффициент теплопередачи на единицу длины скважины от скважинного потока к окружающей породе определяется следующим образом [8], [9]:

$$\alpha = 2\pi / \left(\frac{1}{R_0 \beta_w} + \frac{1}{R_c \beta} \right), \quad \beta_w = \frac{Nu \cdot \lambda}{2R_0},$$

где R_0 — внутренний радиус насосно-компрессорных труб; Nu — число Нуссельта для скважинного потока; λ — коэффициент теплопроводности флюида, текущего в стволе скважины; β — коэффициент теплопередачи через систему труб скважины. Формула для расчета коэффициента теплопередачи от потока к стенке скважины (β_w) зависит от режима течения в скважине, здесь приведена формула для пузырькового режима течения.

Для решения поставленной задачи были выбраны четыре численных метода: метод энтальпий с использованием явной схемы (в дальнейшем назовем его метод 1) [2], метод ловли фронта в узел сетки с использованием неявной схемы (метод 2) [2, 3], метод ловли фронта в узел сетки с использованием шеститочечной симметричной схемы (метод 3) [2, 3] и квазистационарный подход (метод 4).

При квазистационарном подходе делается дополнительное допущение о том, что в талой зоне, вследствие ее малой протяженности и длительного времени протаивания, можно использовать стационарное уравнение теплопроводности. Уравнения, описывающие внешнюю тепловую задачу, запишутся в виде:

$$T = T_0 - \frac{T_0}{\ln\left(\frac{R_{\text{th}}}{R_c}\right)} \ln\left(\frac{r}{R_c}\right), \quad (R_c \leq r \leq R_{\text{th}}) \quad (7)$$

$$T = T_J \ln\left(\frac{r}{R_{\text{th}}}\right) / \ln\left(\frac{R_c + J\Delta r}{R_{\text{th}}}\right), \quad (R_{\text{th}} \leq r \leq R_c + J\Delta r) \quad (8)$$

$$\frac{\partial T_{\text{fr}}}{\partial t} = \chi_{\text{fr}} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T_{\text{fr}}}{\partial r} \right), \quad (R_c + J\Delta r \leq r < \infty) \quad (9)$$

Здесь (7) — стационарное распределение температуры в талой зоне; (8) — стационарное распределение температуры в малой части начала мерзлой зоны (длина интервала, в котором используется это уравнение, $\leq \Delta r$; J — индекс первого узла сетки после радиуса протаивания); (9) — уравнение теплопроводности в мерзлой зоне. Остальные уравнения аналогичны уравнениям (3)-(6).

Результаты расчетов. На основе представленной математической модели были построены алгоритмы, разработана программа и проведена серия расчетов. Расчеты, если не отмечено дополнительно, проводились при следующих значениях параметров: $T_{\text{пл}} = 25 \text{ }^\circ\text{C}$; $\alpha = 10 \text{ Вт}/(\text{м}\cdot^\circ\text{C})$; $R_c = 0,125 \text{ м}$; $T_{\text{geo}} = -2 \text{ }^\circ\text{C}$; $\rho = 2000 \text{ кг}/\text{м}^3$; $S_w = 0,2$; $c_{\text{fr}} = 1000 \text{ Дж}/(\text{кг}\cdot^\circ\text{C})$; $c_{\text{th}} = 1380 \text{ Дж}/(\text{кг}\cdot^\circ\text{C})$; $\lambda_{\text{fr}} = 1,85 \text{ Вт}/(\text{м}\cdot^\circ\text{C})$; $\lambda_{\text{th}} = 1,64 \text{ Вт}/(\text{м}\cdot^\circ\text{C})$; $L = 330000 \text{ Дж}/\text{кг}$; $r = 70 \text{ м}$; $t = 1 \text{ год}$; $\Delta r = 0,01 \text{ м}$; $\Delta t = 50 \text{ с}$ (для явной схемы); $\Delta t = 14400 \text{ с}$ (для квазистационарного подхода).

Для скважины бесконечно малого радиуса, проходящей сквозь толщу ММП, известно автомодельное решение радиальной задачи Стефана [6], [10]. Рассмотрим это решение для ММП, окружающих скважину конечного радиуса R_c . В подъемной колонне скважины находится флюид с температурой Θ , зависящей от времени. Теплоотдача от скважины в мерзлые породы характеризуется коэффициентом α . Тогда может быть выписано следующее автомодельное решение:

$$\Theta(\xi) = T_{\text{geo}} \left(1 - \frac{\text{Ei}(\xi^2/4\chi_{\text{fr}})}{\text{Ei}(\xi_{\text{th}}^2/4\chi_{\text{fr}})} - 4\pi \frac{\lambda_{\text{fr}}}{\alpha} \frac{\exp(-\xi^2/4\chi_{\text{fr}})}{\text{Ei}(\xi_{\text{th}}^2/4\chi_{\text{fr}})} \right), \quad \frac{\xi^2}{\xi_{\text{th}}^2} \geq 1 \quad (10)$$

$$\Theta(\xi) = C(\xi) \left(\text{Ei}\left(\frac{\xi^2}{4\chi_{\text{th}}}\right) - \text{Ei}\left(\frac{\xi_{\text{th}}^2}{4\chi_{\text{th}}}\right) + 4\pi \frac{\lambda_{\text{t}}}{\alpha} \exp\left(\frac{-\xi^2}{4\chi_{\text{th}}}\right) \right), \quad \frac{\xi^2}{\xi_{\text{th}}^2} < 1 \quad (11)$$

$$C(\xi) = \exp\left(\frac{\xi_{\text{th}}^2}{4a_{\text{t}}}\right) \cdot \left(\frac{1}{4} \frac{\rho L w}{\lambda_{\text{t}}} \xi_{\text{th}}^2 - T_{\text{geo}} \frac{\lambda_{\text{fr}}}{\lambda_{\text{th}}} \frac{\exp(-\xi_{\text{th}}^2/4\chi_{\text{fr}})}{\text{Ei}(\xi_{\text{th}}^2/4\chi_{\text{fr}})} \right)$$

$$\text{Ei}(x) = \int_x^\infty \frac{\exp(-y)}{y} dy, \quad \xi_{\text{th}} = R_{\text{th}}/\sqrt{t}, \quad \xi = R_0/\sqrt{\tau}.$$

Здесь (10) — соответствует прогреву мерзлой породы (до протаивания); (11) — при протаивании.

Представленное решение позволяет находить не постоянное значение температуры потока в скважине, а распределение этой температуры во времени $\Theta(\xi(\tau \in (0, t)))$, которому соответствует некоторый радиус протаивания R_{th} за время t , определяющие постоянную ξ_{th} (рис. 1).

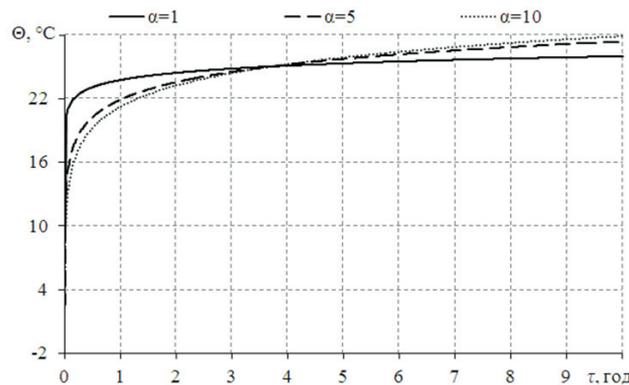


Рис. 1. Распределение температуры потока в скважине, полученное с помощью автомодельного решения, $t = 10 \text{ лет}$

При расчете методом энтальпий с использованием явной схемы мы задаем постоянную температуру потока в скважине и получаем соответствующий ей радиус протаивания, в связи с этим для сравнения необходимо обеспечить такой же порядок действий и при расчете с использованием автомодельного решения. Для этого будем находить радиус протаивания из следующего уравнения:

$$\frac{1}{t_0} \int_0^{\xi} \Theta(\xi) d\xi - T_{\text{п}} = 0,$$

где первый член — среднее значение температуры из распределения, полученного с помощью автомодельного решения (рис. 1). Из рис. 1 видно, что распределение температуры наиболее близко к постоянной при низких значениях коэффициента теплопередачи α . Поэтому при сравнении численного решения по методу энтальпий с использованием явной схемы и автомодельного решения будем использовать $\alpha = 1$ (рис. 2).

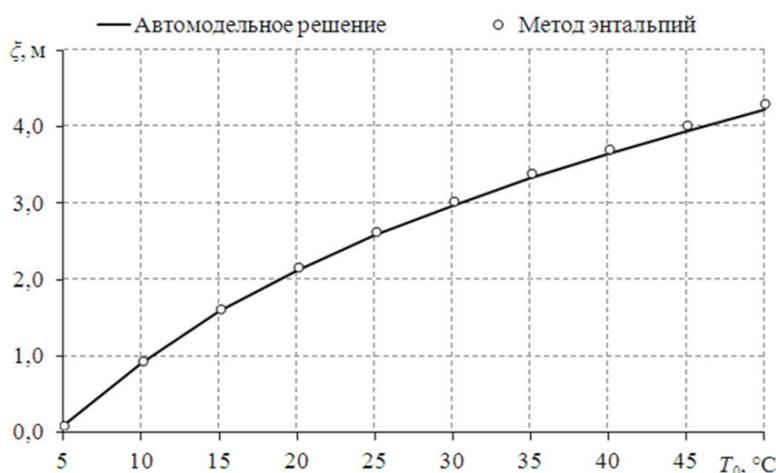


Рис. 2. Радиус протаивания через 10 лет в зависимости от температуры потока в скважине

Из рис. 2 видно, что автомодельное решение и метод энтальпий с использованием явной схемы дают похожие результаты радиуса протаивания, поэтому можно заключить, что этот метод позволяет решать радиальную задачу Стефана с достаточно высокой точностью.

В табл. 1 представлены результаты расчетов радиуса протаивания различными методами, а также время этих расчетов. Видно, что все методы дают результаты близкие к тем, которые получены с использованием метода энтальпий, и, следовательно, достаточно точные. При этом наибольшая относительная погрешность (в среднем 1,6%) у квазистационарного подхода, который дает несколько завышенные значения радиуса протаивания относительно метода 1 (в среднем на 6,4 см). Наименьшее время расчета у метода 2 (в среднем 1,3 с); наибольшее — при использовании метода 1 (в среднем 500 с), так как для сходимости этого метода, в отличие от других, необходим малый шаг по времени.

Таблица 1

t, год	Радиус протаивания, м				Время расчета, с			
	Метод 1	Метод 2	Метод 3	Метод 4	Метод 1	Метод 2	Метод 3	Метод 4
1	1,97	1,97	1,97	2,01	68	0,7	1,0	0,6
2	2,69	2,7	2,7	2,74	182	0,9	1,4	1,2
3	3,23	3,24	3,24	3,29	249	1,0	1,6	1,7
4	3,68	3,68	3,68	3,74	351	1,1	1,8	2,6
5	4,07	4,07	4,07	4,13	360	1,2	2	2,8
6	4,41	4,42	4,42	4,48	429	1,3	2,1	3,3
7	4,73	4,74	4,74	4,80	583	1,4	2,2	3,4
8	5,02	5,03	5,03	5,10	852	1,5	2,3	4,1
9	5,30	5,30	5,3	5,37	928	1,6	2,4	5,6
10	5,55	5,56	5,56	5,63	994	1,7	2,5	5,8

На рис. 3 представлены результаты расчетов температуры грунта вокруг скважины различными методами. Видно, что все методы дают почти одинаковые распределения температуры. Однако метод ловли фронта в узел сетки с использованием шеститочечной симметричной схемы дает распределение температуры, колеблющееся вблизи распределений, полученных методами 1 и 2; квазистационарный подход дает несколько заниженные значения температуры вблизи скважины и завышенные вблизи границы протаивания.

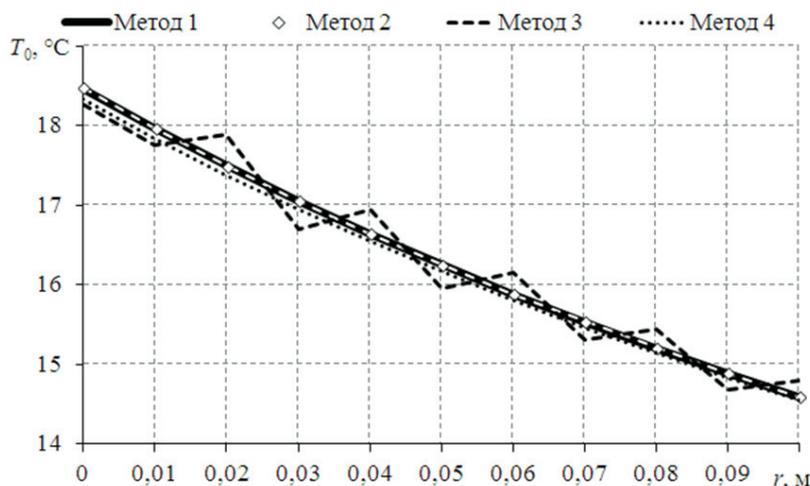


Рис. 3. Распределение температуры вблизи скважины, полученное в результате расчетов различными численными методами

Результаты:

- 1) Построено автомодельное решение радиальной задачи теплоотдачи от скважины конечного радиуса в окружающие многолетнемерзлые породы.
- 2) Сравнение автомодельного решения и результатов расчетов радиуса протаивания, полученного с использованием метода энтальпий, показало, что этот метод позволяет находить радиус протаивания с высокой точностью. Однако он требует значительно больше расчетного времени, чем другие методы.
- 3) Среди рассмотренных в статье методов наиболее предпочтительным для расчета радиуса протаивания и распределения температуры в окружающих

скважину мерзлых породах является метод ловли фронта в узел сетки с использованием неявной схемы, который обладает высокой точностью и наибольшей скоростью расчета.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бахмат Г.В., Кислицын А.А. и др. Исследование тепловых процессов на объектах трубопроводного транспорта: Учебное пособие. Тюмень: Вектор Бук. 2008. 216 с.
2. Самарский А.А., Гулин А.В. Численные методы: учебное пособие для вузов. М.: Наука, 1989. 432 с.
3. Павлов А.Р. Математическое моделирование процессов тепломассопереноса при фазовых переходах. Учебное пособие. Якутск, 2001. 55 с.
4. Шагапов В.Ш., Мусакаев Н.Г. Теплообмен скважины с окружающими породами // Инженерно-физический журнал. 1998. Т. 71. № 6. С. 1134-1140.
5. Пудовкин М.А., Саламатин А.Н., Чугунов В.А. Температурные процессы в действующих скважинах. Казань: Изд-во Казанского университета, 1977. 168 с.
6. Медведский Р.И. Строительство и эксплуатация скважин на нефть и газ в вечномерзлых породах. М.: Недра, 1987. 230 с.
7. Мусакаев Н.Г., Романиук С.Н., Бородин С.Л. Численное исследование закономерностей движения фронта фазового перехода в многолетнемерзлых породах // Известия вузов. Нефть и газ. 2011. №6. С. 122-128.
8. Чисхолм Д. Двухфазные течения в трубопроводах и теплообменниках: Пер. с англ. М.: Недра, 1986. 204 с.
9. Burger, J., Sourieau, P., Combarous, M. Recupération assistée du pétrole les méthodes thermiques. Paris, 1988.
10. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1977. 735 с.

REFERENCES

1. Bakhmat, G.V., Kislitsyn, A.A. et al. *Issledovanie teplovykh protsessov na ob"ektakh truboprovodnogo transporta: Uchebnoe posobie* [Researching of thermal processes on the objects of pipeline transportation. Textbook]. Tyumen, 2008. 216 p. (in Russian).
2. Samarskii, A.A., Gulin, A.V. *Chislennye metody: uchebnoe posobie dlia vuzov* [Numerical methods: textbook for colleges]. Moscow: Nauka, 1989. 432 p. (in Russian).
3. Pavlov, A.R. *Matematicheskoe modelirovanie protsessov teplomassoperenosa pri fazovykh perekhodakh. Uchebnoe posobie* [Mathematical modeling of heat and mass transfer at the transition phase. Textbook]. Yakutsk, 2001. 55 p. (in Russian).
4. Shagapov, V.Sh., Musakaev, N.G. Heat transfer in the well with surrounding formations. *Inzhenerno-fizicheskii zhurnal — Journal of Engineering Physics*. 1998. V. 71. № 6. Pp. 1134-1140. (in Russian).
5. Pudovkin, M.A., Salamatin, A.N., Chugunov, V.A. *Temperaturnye protsessy v deistvuiushchikh skvazhinakh* [Thermal processes in production wells]. Kazan, 1977. 168 p. (in Russian).
6. Medvedskii, R.I. *Stroitel'stvo i ekspluatatsiia skvazhin na neft' i gaz v vechnomerzlykh porodakh* [Construction and operation of oil and gas wells in permafrost]. Moscow: Nedra, 1987. 230 p. (in Russian).
7. Musakaev, N.G., Romaniuk, S.N., Borodin, S.L. Numerical research of the front motion phase transition in permafrost. *Izvestiia vuzov. Neft' i gaz — Proceedings of Higher Educational Institutions. Oil and Gas*. 2011. № 6. Pp. 122-128. (in Russian).
8. Chiskholm, D. *Dvukhfaznye techeniia v truboprovodakh i teploobmennikakh* [Two-phase flows in pipelines and heat exchangers] / Transl. fr. Eng. Moscow: Nedra, 1986. 204 p. (in Russian).

9. Burger, J., Sourieau, P., Combarous, M. Recupération assistée du pétrole les méthodes thermiques. Paris, 1988.

10. Tikhonov, A.N., Samarskii, A.A. *Uravneniia matematicheskoi fiziki* [Equations of mathematical physics]. Moscow: Nauka, 1977. 735 p. (in Russian).

Авторы публикации

Мусакаев Наиль Габсалимович — заведующий лабораторией гидродинамики многофазных сред Института теоретической и прикладной механики им. С.А. Христиановича СО РАН (Тюменский филиал); профессор кафедры механики многофазных систем Тюменского государственного университета, доктор физико-математических наук, доцент

Бородин Станислав Леонидович — научный сотрудник Института теоретической и прикладной механики им. С.А. Христиановича СО РАН (Тюменский филиал), кандидат физико-математических наук

Романюк Сергей Николаевич — научный сотрудник Института криосферы Земли СО РАН (Тюмень)

Authors of the publication

Nail G. Musakaev — Dr. Sci. (Phys.-Math.), Professor, Head of the Laboratory of Khristianovich Institute of Theoretical and Applied Mechanics (Tyumen branch), Siberian Branch of Russian Academy of Sciences; Tyumen State University

Stanislav L. Borodin — Cand. Sci. (Phys.-Math.), Researcher, Khristianovich Institute of Theoretical and Applied Mechanics (Tyumen Branch), Siberian Branch of Russian Academy of Sciences

Sergey N. Romanuyuk — Researcher, Earth Cryosphere Institute, Siberian Branch of Russian Academy of Sciences (Tyumen)